Funciones zeta en capas esféricas con potenciales suaves

Pedro Morales-Almazán

Department of Mathematics
The University of Texas at Austin
pmorales@math.utexas.edu

Encuentro Virtual, 10 de junio de 2015

"Si se encontrara un contraejemplo para la hipótesis de Riemann, habría una pregunta que aún persistiría: ¿ Cómo puede ser que la función zeta de Riemann reproduce tan fielmente un sistema cuántico sin de hecho serlo?"

"Si se encontrara un contraejemplo para la hipótesis de Riemann, habría una pregunta que aún persistiría: ¿ Cómo puede ser que la función zeta de Riemann reproduce tan fielmente un sistema cuántico sin de hecho serlo?"

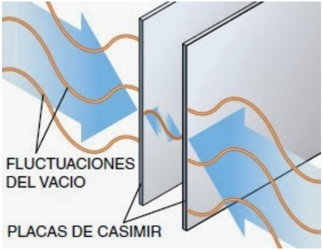
Sir M.V. Berry

Primer Acto

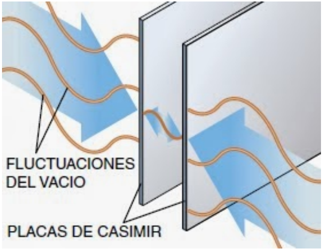
Primer Acto

Casimir y su efecto

El efecto Casimir



El efecto Casimir



Frecuencias

Fuera: Fluctuaciones de vacío de cualquier longitud de onda
Dentro: Multiplos enteros

El efecto Casimir

Fuerza Casimir

La diferencia de presiones genera una fuerza atractiva entre ambas placas

$$F = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4}$$

donde a es la separación entre placas.

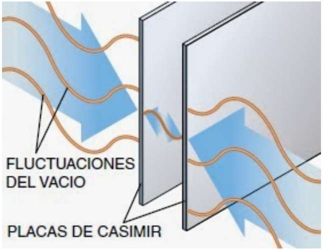
El efecto Casimir

Energía en la cavidad

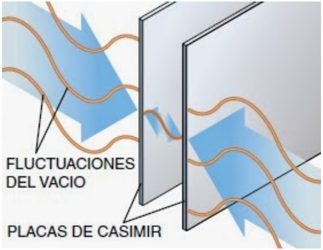
$$E = \frac{1}{2} \sum_n E_n$$

donde E_n es la energía de la n-ésima onda estacionaria.

El efecto Casimir



El efecto Casimir



$$E = \frac{1}{2}\sum_n E_n$$

El efecto Casimir

Problemas

$$E = \frac{1}{2}\sum_n E_n$$

¡Es una expresión divergente en la mayoría de los casos!

THE UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN

Segundo Acto

Segundo Acto

Las zetas crecen en el bosque

Función zeta

Ecuación diferencial

$$E = \frac{1}{2}\sum_n E_n$$

Función zeta

Ecuación diferencial

$$E = \frac{1}{2} \sum_n E_n$$

$$E_n \sim \omega_n = \lambda_n^{1/2}$$

Función zeta

Ecuación diferencial

$$E = \frac{1}{2}\sum_n E_n$$

$$E_n \sim \omega_n = \lambda_n^{1/2}$$

con

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = \lambda\phi(x)$$

Función zeta

Ecuación diferencial

$$E = \frac{1}{2}\sum_n E_n$$

$$E_n \sim \omega_n = \lambda_n^{1/2}$$

con

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = \lambda\phi(x)$$

en $\mathbb{R}^3$ con condiciones de Dirichlet $\phi(0) = 0$ y $\phi(a) = 0$.

Función zeta

$$E \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2}$$

Función zeta

$$E \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \qquad \textit{Diverge}$$

Función zeta

$$E \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \qquad \textit{Diverge}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$$

Función zeta

$$E \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \qquad \textit{Diverge}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}, \qquad \Re(s) > 3/2$$

THE UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN

Función zeta

Regularización por funciones zeta

Sea $\mathcal{M}$ una variedad Reimanniano, con o sin frontera, de dimensión d, y sea P un operador diferencial sobre $L^2(\mathcal{M})$. Definimos

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} \lambda^{-s}, \qquad \Re(s) > d/2$$

Función zeta

Regularización por funciones zeta

Sea $\mathcal{M}$ una variedad Reimanniano, con o sin frontera, de dimensión d, y sea P un operador diferencial sobre $L^2(\mathcal{M})$. Definimos

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} \lambda^{-s}, \qquad \Re(s) > d/2$$

Continuación analítica

$\zeta(s)$ admite una continuación analítica a todo el plano complejo, salvo por polos simples en a lo sumo

$$s = d/2, (d-1)/2, \ldots, 1/2, -(2l+1)/2, l \in \mathbb{N}.$$

Función zeta

Ejemplo

Sea $\mathcal{M} = S^1$ y $P = -\frac{d^2}{d\theta^2}$,

Función zeta

Ejemplo

Sea $\mathcal{M} = S^1$ y $P = -\frac{d^2}{d\theta^2}$,

$$-\frac{d^2}{d\theta^2}\phi(\theta) = \lambda\phi(\theta)\,,$$

Función zeta

Ejemplo

Sea $\mathcal{M} = S^1$ y $P = -\frac{d^2}{d\theta^2}$,

$$-\frac{d^2}{d\theta^2}\phi(\theta) = \lambda\phi(\theta)\,,$$

$$\phi(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta)\,,$$

Función zeta

Ejemplo

Sea $\mathcal{M} = S^1$ y $P = -\frac{d^2}{d\theta^2}$,

$$-\frac{d^2}{d\theta^2}\phi(\theta) = \lambda\phi(\theta)\,,$$

$$\phi(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta)\,,$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Función zeta

Ejemplo

Sea $\mathcal{M} = S^1$ y $P = -\frac{d^2}{d\theta^2}$,

$$-\frac{d^2}{d\theta^2}\phi(\theta) = \lambda\phi(\theta)\,,$$

$$\phi(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta)\,,$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} = \zeta_R(2s)\,.$$

Función zeta

Regularización de función zeta

Función zeta

Regularización de función zeta

Energía Casimir

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

Determinante funcional

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

$$\text{Determinante funcional} = \exp \zeta'(0)$$

THE UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

$$\text{Determinante funcional} = \exp \zeta'(0)$$

Ejemplos

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

$$\text{Determinante funcional} = \exp \zeta'(0)$$

Ejemplos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

$$\text{Determinante funcional} = \exp \zeta'(0)$$

Ejemplos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \equiv \zeta(-1)$$

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

$$\text{Determinante funcional} = \exp \zeta'(0)$$

Ejemplos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \equiv \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

$$\text{Determinante funcional} = \exp \zeta'(0)$$

Ejemplos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \equiv \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots$$

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

$$\text{Determinante funcional} = \exp \zeta'(0)$$

Ejemplos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \equiv \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots \equiv \zeta(-2)$$

Función zeta

Regularización de función zeta

$$\text{Energía Casimir} \sim \zeta(-1/2)$$

$$\text{Determinante funcional} = \exp \zeta'(0)$$

Ejemplos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \equiv \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots \equiv \zeta(-2) = 0$$

Tercer Acto

Tercer Acto

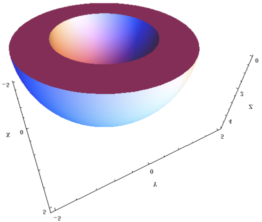
¡Santas capas esféricas Batman!

Capas esféricas

$$\mathcal{M} = \bar{B}_c^d(0) \setminus B_b^d(0)\,, \quad P = -\Delta + V(\rho)\,, \quad \text{Dirichlet en } \rho = b, c$$

Capas esféricas

$$\mathcal{M} = \bar{B}_c^d(0) \setminus B_b^d(0)\,, \quad P = -\Delta + V(\rho)\,, \quad \text{Dirichlet en } \rho = b, c$$



Capas esféricas

Función zeta

$$P\phi = \lambda\phi$$

Capas esféricas

Función zeta

$$P\phi = \lambda\phi$$

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda\in\sigma(P)} \lambda^{-s}, \quad \Re(s) > d/2$$

Función zeta

$$P\phi = \lambda\phi$$

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} \lambda^{-s}, \quad \Re(s) > d/2$$

Se necesita saber explicitamente el espectro de P

Capas esféricas

Función zeta

$$P\phi = \lambda\phi$$

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda\in\sigma(P)} \lambda^{-s}, \quad \Re(s) > d/2$$

Se necesita saber explicitamente el espectro de P

Teorema del residuo

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma d\lambda\, f(\lambda)$$

$f(\lambda)$ tiene polos en los valores propios de P con residuos λ^{-s}.

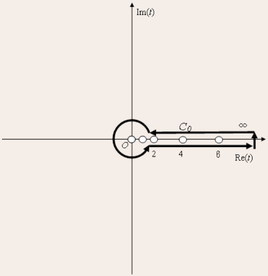
Capas esféricas

Función zeta

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma d\lambda\,\lambda^{-s}\frac{d}{d\lambda}\log F(\lambda)$$

Función zeta

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma d\lambda\,\lambda^{-s}\frac{d}{d\lambda}\log F(\lambda)$$



Capas esféricas

Continuación analítica

Restar el comportamiento en el infinito y sumarlo de nuevo

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma d\lambda\,\lambda^{-s}\frac{d}{d\lambda}\log F(\lambda)$$

Capas esféricas

Continuación analítica

Restar el comportamiento en el infinito y sumarlo de nuevo

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\gamma d\lambda\, \lambda^{-s} \frac{d}{d\lambda} \log F(\lambda) - \clubsuit$$

Capas esféricas

Continuación analítica

Restar el comportamiento en el infinito y sumarlo de nuevo

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma d\lambda\,\lambda^{-s}\frac{d}{d\lambda}\log F(\lambda) - \clubsuit$$

$$+\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma d\lambda\,\clubsuit$$

Capas esféricas

Continuación analítica

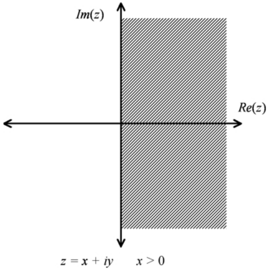
Restar el comportamiento en el infinito y sumarlo de nuevo

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma d\lambda\,\lambda^{-s}\frac{d}{d\lambda}\log F(\lambda) - \clubsuit$$

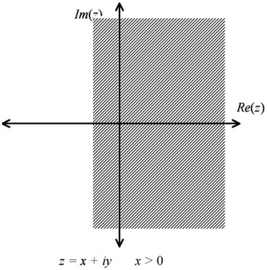
$$+\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma d\lambda\,\clubsuit$$

$\clubsuit$ es el comportamiento asintótico del integrando cuando $\lambda\to\infty$. Cada order asintótico aumenta en $1/2$ la banda de convergencia de $\zeta(s)$.

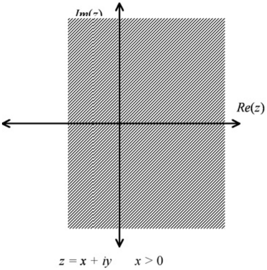
Capas esféricas



Capas esféricas



Capas esféricas



Capas esféricas

Expansión asintótica

$F(\lambda)$ está dada por las condiciones de Dirichlet,

$$F(\lambda) = \phi_\lambda(c) = 0\,.$$

♣ se puede hallar utilizando WKB

Capas esféricas

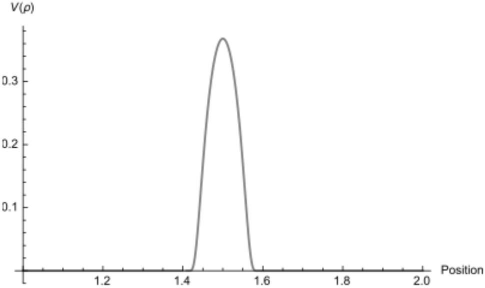
Energía Casimir

Capas esféricas

Energía Casimir

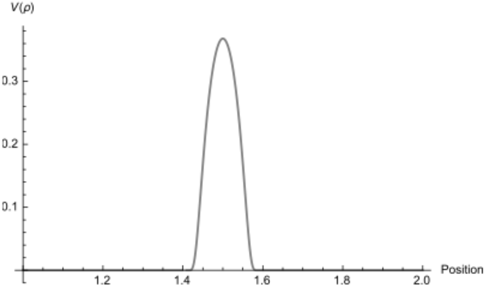
$$
\begin{aligned}
E^{\text{ren}}_{Cas} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 d\lambda\,\lambda\frac{d}{d\lambda}\log R_0(c;\imath\lambda)\\
&-\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty d\lambda\,\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\log R_0(c;\imath\lambda)+\log(2\lambda)+S_1(b)\lambda^{-2}-\sum_{i=-1}^{2}\lambda^{-i}\int_b^c d\rho\,S_i(\rho)\right)\\
&-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\int_0^\infty d\xi\,\xi\frac{d}{d\xi}\left(\log R_\nu(c;\imath\nu\xi)+\log(2\nu\tilde{S}_{-1}(b))+\frac{\tilde{S}_1(b)}{\tilde{S}_{-1}(b)}\nu^{-2}-\sum_{i=-1}^{2}\nu^{-i}\int_b^c d\rho\,\tilde{S}_i(\rho)\right)\\
&+\frac{1}{4\pi}(c-b)-\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\log(2c\pi)}{c}-\frac{\log(2b\pi)}{b}+\frac{\pi\log(c)}{16c}+\frac{\pi\log(b)}{16b}\right)\\
&+\frac{1}{256}\left(\frac{7}{3}-\gamma\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{16\pi}\left(\frac{8}{3}-\log(2)+\frac{2\zeta_R(3)}{\pi^2}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\\
&+\frac{1}{16\pi}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\frac{1}{4\pi}\int_b^c d\rho\,\left(\log(4\pi\rho)-1\right)V(\rho)\,. \qquad (41)
\end{aligned}
$$

Capas esféricas

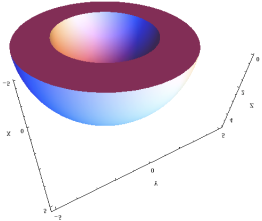


(a) Potential

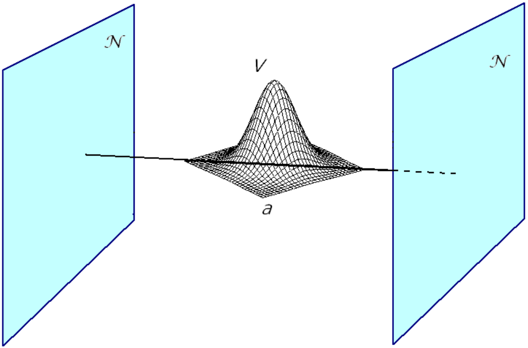
Capas esféricas



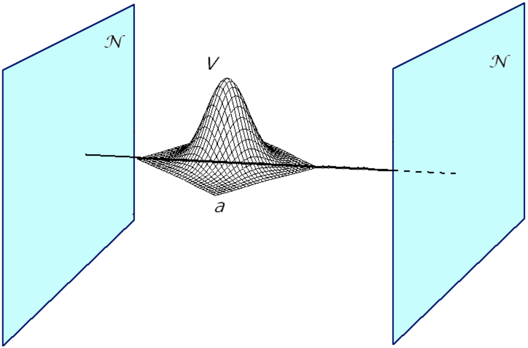
(a) Potential



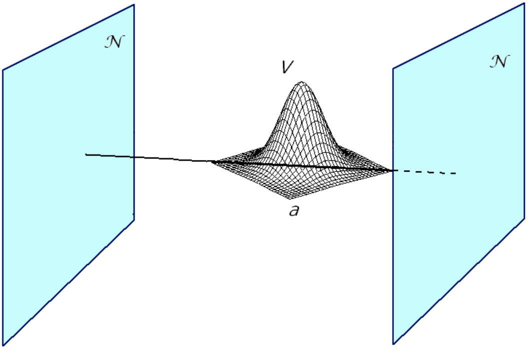
Capas esféricas



Capas esféricas



Capas esféricas

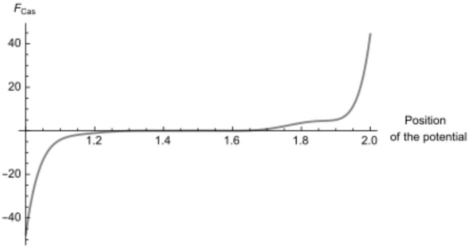


Capas esféricas

$$F_{Cas} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\lambda \,\frac{\partial}{\partial a}\log R_0(c;\imath\lambda)$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^\infty d\xi\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\nu\log R_\nu(c;\imath\nu\xi) - \int_b^c d\rho\,\tilde{S}_1(\rho)\right)$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_b^c d\rho\,\log(\rho)\frac{\partial}{\partial a}V(\rho)\,. \quad (49)$$

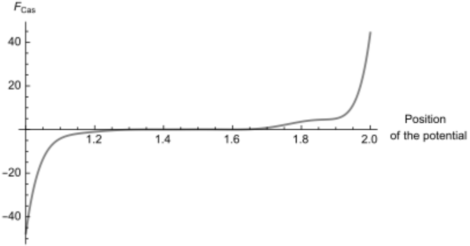
THE UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN

Capas esféricas



(b) Casimir force

Capas esféricas



(b) Casimir force

Atraído a la pared más cercana

Resumen

Resumen

1. El efecto Casimir es apreciable a escalas muy pequeñas

Resumen

1. El efecto Casimir es apreciable a escalas muy pequeñas
2. El efecto Casimir depende fuertemente de la geometría

Resumen

1. El efecto Casimir es apreciable a escalas muy pequeñas
2. El efecto Casimir depende fuertemente de la geometría
3. Las funciones zeta admiten una continuación analítica

Resumen

1. El efecto Casimir es apreciable a escalas muy pequeñas
2. El efecto Casimir depende fuertemente de la geometría
3. Las funciones zeta admiten una continuación analítica
4. Las funciones zeta dan un método de regularización

Resumen

1. El efecto Casimir es apreciable a escalas muy pequeñas
2. El efecto Casimir depende fuertemente de la geometría
3. Las funciones zeta admiten una continuación analítica
4. Las funciones zeta dan un método de regularización
5. El estudio de capas esféricas se realiza estudiándo la ecuación de valor propio y su comportamiento asintótico

Resumen

1. El efecto Casimir es apreciable a escalas muy pequeñas
2. El efecto Casimir depende fuertemente de la geometría
3. Las funciones zeta admiten una continuación analítica
4. Las funciones zeta dan un método de regularización
5. El estudio de capas esféricas se realiza estudiándo la ecuación de valor propio y su comportamiento asintótico
6. En el caso de 2 dimensiones, el potencial es atraído a la pared más cercana

Preguntas

Fun Fact:
Batman hasn't left his study in 10 years.

email: pmorales@math.utexas.edu
twitter: @p3d40

THE UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN